

Matematică

**Ghid complet
pentru Evaluarea Națională**

clasa a VIII-a

– ediție revizuită –



Booklet

București, 2024

Cuprins

Exerciții și probleme	4
1. Mulțimea numerelor naturale	4
2. Mulțimea numerelor întregi.....	9
3. Mulțimea numerelor raționale	11
4. Mulțimea numerelor reale	19
5. Rapoarte și proporții. Procente. Probabilități	22
6. Calcul algebric	26
7. Funcții	30
8. Ecuații și sisteme de ecuații liniare. Inecuații. Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor.....	34
9. Unghi.....	40
10. Triunghi	42
11. Patrulater	52
12. Cerc	65
13. Paralelism și perpendicularitate în spațiu. Poliedre.....	68
14. Corpuri rotunde	79
Teste	84
Evaluarea Națională pentru absolvenții clasei a VIII-a Anul școlar 2023 – 2024	205
Răspunsuri.....	208

27. Calculați:

a) $2^2 + 3^2 + 4^2$;

b) $5^3 - 5^2$;

c) $11^3 - 3^6 + 7^0 + 0^7$;

d) $(3 + 2)^2 + (7 - 3)^3$;

e) $3^{71} : 3^{69}$;

f) $2^3 \cdot 2^5$;

g) $(3^{10})^2 : (3^2)^9$;

h) $3^4 \cdot 3^6 \cdot 3^5 : (3^3)^4$;

i) $25^{10} \cdot 5^{30} : 125^{16} : (5^3)^0$;

j) $3^{44} \cdot 9^{25} : 27^{30}$;

k) $4^{50} : 8^{30} : 16^2$;

l) $(3^3)^{15} : (27^2)^3 : 81^6$.

28. Efectuați calculele, utilizând factorul comun:

a) $2^{57} + 2^{58} + 2^{59}$;

b) $6 \cdot 5^{42} + 3 \cdot 5^{43} + 2 \cdot 5^{44}$;

c) $11^{14} - 3 \cdot 11^{13} - 11^{12} \cdot 2$;

d) $8^{100} - 3 \cdot 8^{98} - 8^{97} \cdot 7$.

29. Determinați numărul natural n în fiecare caz:

a) $8^n + 8^{n+1} = 72$;

b) $6^n + 6^{n+3} = 217 \cdot 6^{10}$;

c) $3^4 \cdot 3^5 \cdot 3^{16} = 3^{5n}$;

d) $(8 \cdot 4)^{10} : 4^5 : 2^3 = 2^n$;

e) $7^{2n+1} + 7^{2n+3} = 350 \cdot 7^{100}$;

f) $5^{2n-1} + 5^{2n} = 750$;

g) $2^1 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot \dots \cdot 2^{10} = 2^n$;

h) $3^2 \cdot 3^4 \cdot 3^6 \cdot \dots \cdot 3^{50} = 9^n$.

30. Calculați:

a) $2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{100}$;

c) $(4^2 + 4^4 + 4^6 + \dots + 4^{40}) \cdot 15$.

b) $(3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{50}) \cdot 2 + 9$;

31. Determinați ultima cifră a numerelor:

a) 2^{101} ;

b) 2019^{2019} ;

c) $1^{2020} + 2^{2019} + 3^{2018} + 4^{2017} + 5^{2016} + 6^{2015} + 7^{2014} + 8^{2013} + 9^{2012}$.

32. Arătați că numărul $n = 8^{2018} + 6^{2019} + 5^{2020}$ este divizibil cu 5.

33. Determinați numerele de forma \overline{ab} pentru care $15 \cdot \overline{ab}$ este pătrat perfect.

34. Arătați că numărul $n = \overline{ab} + \overline{ba} - \overline{aa} - \overline{bb} + 64$ este atât pătrat perfect cât și cub perfect.

35. Fie n un număr natural nenul și $x = 10^n + 3$. Arătați că x nu este pătrat perfect.

36. Arătați că numărul $n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 15 + 7$ nu este pătrat perfect.

37. Arătați că numărul $x = 7^{2n} + 2 \cdot 7^{2n+1} + 7^{2n+2}$ este pătratul unui număr natural pentru orice număr natural n .

38. Arătați că numărul $x = (2 \cdot 5^{92} + 2 \cdot 5^{91} + 4 \cdot 5^{90}) \cdot 125^4$ este cub perfect.

39. Se consideră mulțimea $A = \{0, 1, 2, 4, 5, 9, 12, 239, 448, 1230\}$. Determinați mulțimile: $A \cap D_2, A \cap D_{12}, A \cap D_5, A - D_{10}, A \cap M_3, A \cap M_2, A \cap M_{10}$ (mulțimea D_n reprezintă mulțimea divizorilor naturali ai numărului n , iar mulțimea M_n reprezintă mulțimea multiplilor naturali ai numărului n).

40. Se consideră mulțimile $A = \{x | x \in \mathbb{N} \text{ și } 23 \leq x \leq 51\}$, $B = \{x | x \in A \text{ și } x : 3\}$, $C = \{x | x \in A \text{ și } x : 2\}$, $D = \{x | x \in A \text{ și } 9 | x\}$, $E = \{x | x \in A \text{ și } x : 5\}$, $F = \{x | x \in A \text{ și } x : 10\}$, $G = \{x | x \in A \text{ și } x \text{ e număr prim}\}$. Enumerați elementele mulțimilor A, B, C, D, E, F, G .

41. Determinați suma divizorilor naturali ai numărului x în fiecare caz:

- a) $x = 18$; b) $x = 3^2$; c) $x = 5$.

42. Determinați numărul de divizori naturali ai numerelor:

- a) 45; b) 49; c) 125; d) 216.

43. Se consideră mulțimile $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x + 4 < 9\}$ și $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ e divizor al lui } 12\}$.

- a) Determinați elementele mulțimilor A și B .
b) Determinați elementele mulțimilor $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, $B - A$.
c) Calculați cardinalul mulțimii A .

44. a) Determinați numerele de forma $\overline{25b}$ divizibile cu 2.

b) Câte numere de forma $\overline{6a7b}$ divizibile cu 5 există?

c) Determinați numerele de forma $\overline{2a3b}$ divizibile cu 3.

d) Câte numere de forma \overline{xyx} divizibile cu 2 există? Care este cel mai mare dintre acestea?

45. Se consideră mulțimile $A = \{n \in \mathbb{N} \mid \overline{3n4} : 3\}$ și $B = \{n \in \mathbb{N} \mid \overline{32n} : 2\}$. Determinați elementele mulțimilor A , B , $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, $B - A$ și cardinalul mulțimii B .

46. a) Determinați numerele naturale a și b , știind că numărul $\overline{a53b}$ e divizibil cu 15.

b) Determinați numerele naturale a , b și c , știind că numărul $\overline{2abc}$ e divizibil cu 90.

c) Calculați suma numerelor de forma $\overline{4a7b}$ divizibile cu 45.

47. Arătați că:

a) $7^n + 7^{n+1} + 7^{n+2} : 3$, pentru oricare număr natural n .

b) $7 \cdot 5^{2n+1} + 5^{2n+2} \cdot 12 + 5^{2n+4} : 48$, pentru oricare număr natural n .

c) $2^{n+3} \cdot 3^{n+1} + 6^n \cdot 5 + 2^{n+2} \cdot 3^n : 11$, pentru oricare număr natural n .

d) $25 \cdot 12^n \cdot 3^{n+2} + 6 \cdot 4^{n+1} \cdot 9^{n+2} + 18^{n+2} \cdot 2^{n+3} : 23$, pentru oricare număr natural n .

e) $2^{n+2} \cdot 5^{n+3} + 1 : 3$, pentru oricare număr natural n .

48. Arătați că:

a) $1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{50} : 7$;

b) $3^2 + 3^3 + \dots + 3^{101} : 12$;

c) $5^2 + 5^3 + \dots + 5^{2020} : 31$.

49. Determinați numărul natural n în fiecare caz:

a) $(n + 2) \mid 15$; d) $(n + 1) \mid (2n + 3)$;

b) $(2n + 3) \mid 20$; e) $(2n + 5) \mid (4n + 28)$;

c) $30 : (2n + 1)$; f) $(3n + 1) \mid (7n + 9)$.

50. Determinați numărul natural n , știind că $(n + 7) \mid (2n - 8)$ și $(2n - 8) \mid (n + 7)$.

51. Determinați elementele mulțimilor:

$$A = \left\{ n \in \mathbb{N} \mid \frac{5}{n+1} \in \mathbb{N} \right\}, B = \left\{ n \in \mathbb{N} \mid \frac{2n+5}{n+1} \in \mathbb{N} \right\},$$

$$C = \left\{ n \in \mathbb{N} \mid \frac{6n+10}{2n+1} \in \mathbb{N} \right\}, D = \left\{ n \in \mathbb{N} \mid \frac{7n+14}{3n+2} \in \mathbb{N} \right\}.$$

- 52.** a) Determinați numerele prime a , b și c , știind că $a + 4b + 6c = 56$.
 b) Determinați numerele prime a , b și c cu proprietatea $5a + 3b + 10c = 140$.
- 53.** a) Fie x și y numere naturale cu proprietatea că $5 \mid (7x + 2y)$. Arătați că $5 \mid (x + y)$.
 b) Fie x și y numere naturale cu proprietatea că $3 \mid (7x + 4y)$. Arătați că $3 \mid (5x + 2y)$.
- 54.** Determinați cel mai mare divizor comun și cel mai mic multiplu comun al numerelor a și b și verificați relația $[a, b] \cdot (a, b) = a \cdot b$, unde $[a, b]$ reprezintă cel mai mic multiplu comun al numerelor a și b , iar (a, b) reprezintă cel mai mare divizor comun:
 a) $a = 78, b = 60$; c) $a = 112, b = 252$;
 b) $a = 450, b = 1300$; d) $a = 45, b = 98$.
- 55.** Determinați numerele naturale a și b , știind că:
 a) $(a, b) = 3$ și $a + b = 18$; d) $(a, b) = 12$ și $[a, b] = 216$;
 b) $(a, b) = 5$ și $a \cdot b = 750$; e) $(a, b) = 12$ și $a \cdot b = 13824$;
 c) $(a, b) = 7$ și $2a + 3b = 168$; f) $a \cdot b = 3648$ și $[a, b] = 912$.
- 56.** a) Arătați că numerele $n + 2$ și $7n + 15$ sunt prime între ele, pentru oricare număr natural n .
 b) Arătați că numerele $4n + 9$ și $3n + 7$ sunt prime între ele, pentru oricare număr natural n .
- 57.** a) Arătați $(n + 4, 4n + 17) = 1$, pentru oricare număr natural n .
 b) Arătați $(2n + 3, 5n + 7) = 1$, pentru oricare număr natural n .
- 58.** Determinați cel mai mic număr de elevi care se pot alinia în coloane de câte 6 elevi, 8 elevi și 10 elevi.
- 59.** Trei autobuze pleacă dintr-o stație în fiecare dimineață la ora 6. Primul revine în stație din oră în oră, al doilea din 2 în 2 ore, iar al treilea, din 90 în 90 de minute. După câte ore se întâlnesc din nou în stație cele trei autobuze?
- 60.** Determinați cel mai mic număr natural, care împărțit la 18, 45 și 54 dă de fiecare dată restul 13 și câturi nenule.
- 61.** Determinați cel mai mic număr natural, care împărțit la 24, 30 și 81 dă de fiecare dată restul 15 și câturi nenule.
- 62.** Determinați numerele naturale cuprinse între 2000 și 5000, care împărțite la 28, 49 și 35 dau de fiecare dată restul 10 și câturi nenule.
- 63.** Determinați cel mai mic număr natural, care împărțit la 14 dă restul 8, împărțit la 15 dă restul 9 și împărțit la 60 dă restul 54.
- 64.** Determinați numerele naturale cuprinse între 100 și 1000, care împărțite la 12, 15 și 18 dau resturile 6, 9 și, respectiv 12 și câturi nenule.
- 65.** Determinați cel mai mic număr natural, care împărțit la 7 dă restul 1, împărțit la 8 dă restul 4 și împărțit la 9 dă restul 7.
- 66.** Împărțind numerele 1018 și 2018 la același număr natural nenul, n , obținem resturile 17 și respectiv 16. Determinați toate valorile numărului n .

- 67.** Împărțind numerele 642, 385 și 532 la același număr natural nenul, n , se obțin resturile 12, 10 și respectiv 7. Determinați numărul la care au fost împărțite.
- 68.** Numerele 129, 93 și 168 se împart la același număr natural nenul și se obțin resturile 9, 13, și respectiv 8.
- Determinați cel mai mare număr natural care îndeplinește condițiile problemei.
 - Determinați cel mai mic număr natural care îndeplinește condițiile problemei.
 - Câte numere naturale îndeplinesc condițiile problemei?
- 69.** Calculați media aritmetică a numerelor:
- 10 și 28;
 - 7; 17; 15 și 5.
- 70.** Media aritmetică a două numere este 24. Aflați unul dintre numere, știind că celălalt este 31.
- 71.** Media aritmetică a trei numere este 56, iar media aritmetică a primelor două este 49. Determinați cel de-al treilea număr.
- 72.** Fiecare dintre cei 583 de elevi ai unei școli vorbește fluent cel puțin una dintre limbile engleză sau franceză. Dintre aceștia, 415 vorbesc fluent limba engleză și 270 vorbesc fluent limba franceză.
- Câți elevi vorbesc fluent ambele limbi?
 - Câți elevi vorbesc fluent numai limba franceză?
- 73.** 18 elevi ai unei clase participă la cercul de lectură, iar 19 participă la cercul de informatică. Știind că în clasă sunt 30 de elevi și fiecare dintre ei participă la cel puțin una dintre aceste activități, aflați câți elevi participă atât la cercul de lectură cât și la cercul de informatică.
- 74.** Într-o clasă sunt 28 de elevi. Dintre aceștia, 14 joacă fotbal, 20 joacă handbal, iar 3 nu joacă nici fotbal, nici handbal. Câți elevi din clasă joacă numai fotbal?
- 75.** În vacanța de primăvară, elevii unei clase merg la muzeu sau la grădina zoologică. Se știe că 17 elevi merg numai la muzeu, 15 merg numai la grădina zoologică, iar 5 elevi merg și la muzeu și la grădina zoologică. Aflați câți elevi sunt în acea clasă.

2. Mulțimea numerelor întregi

- 1.** Se dau mulțimile $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 \leq x < 3\}$ și $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 < x \leq 0\}$.
- Scrieți elementele mulțimilor A și B .
 - Calculați suma elementelor mulțimii A .
 - Determinați elementele mulțimilor $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.
- 2.** Se dau mulțimile $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 < x < 5\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z}^* \mid |x| < 7\}$, $C = \{x \in \mathbb{Z}_- \mid x \geq -8\}$, $D = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 4\}$, $E = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < -2\}$.
- Determinați cardinalul mulțimilor A , B , C , D , E .
 - Determinați mulțimile $A \cap B$, $C \cup B$, $C \cap D$, $C \cup D$, $D \setminus A$, $A \setminus B$, $B \setminus C$, $A \setminus (C \cup D)$, $B \cap (C \cup D)$, $E \cup (D \setminus A)$.

- 3.** Calculați suma și produsul elementelor mulțimii $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < 3\}$.
- 4.** Se consideră mulțimea $A = \{-5, -4, -2, 0, 1, 5, 6, 7\}$. Determinați elementele mulțimilor $B = \{x \mid x \in A \text{ și } |x| = x\}$, $C = \{x \mid x \in A \text{ și } |x| = -x\}$, $D = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \in A\}$.
- 5.** Calculați:
- $(-6) + (-8) : 2 + (-10) \cdot (-2)$;
 - $(-54) : (3 - 9) + (-3) : 3$;
 - $(1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6) : (-3)$;
 - $4 \cdot (-2 - 8 + 3) - 2 \cdot (-3 + 8 - 2)$;
 - $(-1) \cdot (3 + 9 - 4 + 8) : (-5 + 4 + 2 - 3)$;
 - $1 + (-6 + 8 - 5 - 1) : (-2 + 3 + 4 - 6)$;
 - $(3 - 8 - 2 + 4) : (-1 - 6 + 3 + 5) - 2$;
 - $-9 - (-7 + 3 + 9) : (1 - 8 + 2)$.
- 6.** Calculați:
- $(-16)^2 : (-2^2)^3 - (-11)^3 \cdot (-11)^4 : 11^5 - 3 \cdot 3^3 \cdot 3^5 : (-3)^8$;
 - $-24 + (-2^2)^4 : 2^5 - (-5^3) \cdot 5^5 : (-5)^6 - (-15)^2 : (-15)$;
 - $(-3)^7 \cdot (-3)^2 : 3^6 - 9^3 : (-3)^4 - (-4^2)^5 : (-2)^{18}$;
 - $[2^{13} \cdot (-4)^6 \cdot (-8)^3]^2 : (4^3)^{10}$;
 - $[9^2 \cdot (-3)^7 : 27^{-2}]^3 : (-81)^{12}$;
 - $[(-2)^{62} \cdot (3^{47})^2 : (2^{60} \cdot 3^{93}) - 4^{20} \cdot 2^{39} - 42^0] \cdot 2 + (-7)$.
- 7.** Calculați:
- $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots + 99 - 100$;
 - $2 - 3 + 4 - 5 + \dots + 2020$;
 - $-1 - 2 - 3 - 4 - \dots - 2019$.
- 8.** Rezolvați în \mathbb{Z} următoarele ecuații:
- $|x| = 0$;
 - $|2x + 4| = 6$;
 - $|3x - 9| = -2$;
 - $|x + 1| + |x + 2| = 0$;
 - $|x - 2| + |2x - 4| = 0$;
 - $|-x| = 7$;
 - $|2x + 4| - 2| = 2$;
 - $|3 - x| + 5| = 4$.
- 9.** Determinați numerele întregi x și y cu proprietatea:
- $|2x - 2| + |y + 8| = 0$;
 - $|x + 5| + |y - 5| = 1$.
- 10.** Determinați mulțimea divizorilor întregi ai următoarelor numere:
- 20;
 - 48;
 - 24;
 - 56;
 - -3^3 .
- 11.** Determinați numărul divizorilor întregi ai următoarelor numere:
- 54;
 - 36;
 - 7;
 - -2^2 .
- 12.** Determinați cel mai mare divizor comun și cel mai mic multiplu comun ai următoarelor perechi de numere întregi:
- 24 și -56;
 - 48 și -72;
 - 225 și 81.

13. Determinați elementele mulțimilor: $A = \left\{ x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ și } \frac{5}{x} \in \mathbb{Z} \right\}$,

$$B = \left\{ x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ și } \frac{7}{2x-1} \in \mathbb{Z} \right\}, C = \left\{ x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ și } -\frac{10}{2x+1} \in \mathbb{Z} \right\},$$

$$D = \left\{ x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ și } \frac{x+3}{x+1} \in \mathbb{Z} \right\}, E = \left\{ x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ și } \frac{2x+4}{x-5} \in \mathbb{Z} \right\},$$

$$F = \left\{ x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ și } \frac{7x-9}{4x+3} \in \mathbb{Z} \right\} \text{ și } G = \left\{ x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ și } \frac{2x+5}{4x-3} \in \mathbb{Z} \right\}.$$

14. Determinați numerele întregi a și b pentru care este adevărată relația:

a) $(a-2)(b+5) = 12$;

b) $(2a+1)(b+5) = -15$;

c) $ab - 2a + 4 = 0$;

d) $ab - 2a + 2b - 10 = 0$;

e) $2ab - 4a + b = 27$.

15. Arătați că numărul $a = |2^{33} - 3^{22}| + 4^{16} \cdot 2$ este pătrat perfect.

16. Comparați numerele $a = |1^{11} - 2^{11}| + |2^{11} - 3^{11}| + \dots + |2019^{11} - 2020^{11}|$ și

$$b = |2020^0 - (-2020)^{10}|.$$

3. Mulțimea numerelor raționale

1. Stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:

a) $-2 \in \mathbb{Q}$;

f) $2, (3) \in \mathbb{Q}_+$;

k) $3 \notin \mathbb{Q}$;

b) $0,732 \in \mathbb{Q}$;

g) $\frac{8}{7} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$;

l) $1,8(2) \notin \mathbb{N}$;

c) $\frac{1}{4} \notin \mathbb{Q}$;

h) $0 \in \mathbb{Q}_+$;

m) $150 \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$;

d) $1,5 \in \mathbb{Z}$;

i) $1,5 \in \mathbb{Z}$;

n) $-7 \in \mathbb{Q}$;

e) $0,71 \in \mathbb{N}$;

j) $2\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$;

o) $-1 \in \mathbb{Q}_+$.

2. Fie mulțimea $M = \left\{ -5; 7,2; 8,1(2); \frac{9}{4}; -17; 5; 2\frac{1}{6}; 7; 0 \right\}$.

Determinați mulțimile: $A = \{x \in M \mid x \in \mathbb{Z}_+\}$, $B = \{x \in M \mid x \in \mathbb{Q}_+\}$,

$C = \{x \in M \mid x \in \mathbb{Z}_-\}$, $D = \{x \in M \mid x \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}\}$; $E = \{x \in M \mid x \in \mathbb{Q}^*\}$,

$F = \{x \in M \mid x \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}\}$, $G = \{x \in M \mid x \in \mathbb{N}\}$,

$H = \{x \in M \mid x \notin \mathbb{Z}\}$, $I = \{x \in M \mid x \notin \mathbb{Q}\}$.

3. Se consideră mulțimea

$$A = \left\{ \frac{7}{4}; 1\frac{2}{3}; 0, (5); \frac{14}{7}; 0; -4; \frac{18}{3}; \frac{1}{0,25}; \frac{1}{0,(6)}; 1,4; -8; 10 \right\}.$$

a) $A \cap \mathbb{N}$;

d) $A \cap \mathbb{Q}^*$;

g) $A \cap (\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z})$;

b) $A \cap \mathbb{Z}$;

e) $A \cap (\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N})$;

h) $A \cap (\mathbb{Q} \setminus \mathbb{N})$;

c) $A \cap \mathbb{Q}$;

f) $A \cap \mathbb{Q}_+$;

i) $A \cap \mathbb{Q}_-$.

$$A = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{N}, a \in D_3, b \in D_{10} \right\} \text{ și } B = \left\{ \frac{x}{y} \mid x, y \in \mathbb{N}^*, |x| \leq 2 \text{ și } |-y| < 4 \right\}.$$

- a) Determinați elementele mulțimilor A și B .
 - b) Determinați $\text{card} B$.
 - c) Determinați: $A \cap B$; $A \cap \mathbb{N}$; $(A \cap \mathbb{Q}) \setminus \mathbb{N}$; $B \cap \mathbb{Z}_+$; $B \cap \mathbb{Z}$; $B \setminus \mathbb{N}$.
- 5.** Determinați numerele întregi a și b , știind că $\frac{20}{a}$ și $\frac{b}{24}$ sunt reprezentanți ai numărului $\frac{5}{3}$.
- 6.** Transformați în fracții zecimale următoarele fracții ordinare:
- a) $\frac{7}{10}, \frac{13}{100}, \frac{15}{1000}, \frac{1423}{100}, \frac{19}{10}, \frac{251}{1000}, \frac{1009}{1000}, \frac{1045}{10}$;
 - b) $\frac{7}{4}, \frac{6}{25}, \frac{13}{20}, \frac{9}{125}, \frac{503}{16}, \frac{63}{40}, \frac{2}{625}, \frac{21}{16}$;
 - c) $\frac{15}{7}, \frac{5}{11}, \frac{507}{33}, \frac{19}{3}, \frac{89}{9}, \frac{16}{27}, \frac{3}{7}, \frac{51}{37}$;
 - d) $\frac{1}{6}, \frac{13}{36}, \frac{92}{15}, \frac{101}{35}, \frac{55}{18}, \frac{75}{22}, \frac{35}{24}, \frac{83}{12}$.
- 7.** Transformați în fracții ordinare ireductibile următoarele fracții zecimale:
- a) 2,3; 7,25; 1,2345; 0,485; 51,51; 0,0018; 13,7; 0,5; 1,04; 2,008; 21,234; 299,8;
 - b) 0,(5); 1,(72); 0,(321); 1,(234); 3,(14); 0,(06); 5,(3); 0,(0012); 13,(8); 1,(6); 0,(56); 0,(0625);
 - c) 0,1(5); 0,0(3); 1,25(243); 0,7(23); 2,32(4); 0,321(5); 0,24(5); 6,4(25); 0,35(451); 0;00(8); 1,2(456); 2,3(6).
- 8.**
- a) Determinați a 8-a zecimală a numărului 0,(831).
 - b) Determinați a 99-a zecimală a numărului 1,2(31).
 - c) Determinați a 2020-a zecimală a numărului $\frac{22}{7}$.
- 9.** Calculați suma primelor 100 de zecimale ale numărului $\frac{71}{330}$.
- 10.**
- a) Determinați valorile numărului natural n pentru care fracția $\frac{3n}{n+5}$ este subunitară.
 - b) Determinați valorile numărului natural n pentru care fracția $\frac{n+15}{3n+1}$ este supraunitară.
 - c) Determinați numărul natural n pentru care fracția $\frac{5n}{2n+3}$ este echiunitară.
- 11.** Pentru fiecare dintre numerele raționale $a = -1,15$, $b = \frac{2}{3}$, $c = 2,3$, $d = -\frac{7}{2}$, determinați:
- a) opusul;
 - b) inversul;
 - c) modulul;
 - d) partea întreagă;
 - e) partea fracționară.

12. Determinați valorile numărului întreg n pentru care:

- | | | |
|---------------------------------------|---|--|
| a) $\frac{8}{n} \in \mathbb{N}$; | e) $\frac{13}{2n+1} \in \mathbb{Z}_+$; | i) $\frac{6n+4}{2n-3} \in \mathbb{Z}$; |
| b) $\frac{12}{n+1} \in \mathbb{N}$; | f) $\frac{15}{3n+1} \in \mathbb{Z}$; | j) $\frac{10n-3}{2n+2} \in \mathbb{Z}$; |
| c) $\frac{18}{2n-3} \in \mathbb{Z}$; | g) $\frac{n+2}{n+1} \in \mathbb{N}$; | k) $\frac{5n-2}{2n+1} \in \mathbb{Z}$; |
| d) $\frac{72}{n-1} \in \mathbb{Z}$; | h) $\frac{n+5}{n+2} \in \mathbb{Z}$; | l) $\frac{8n+4}{5n-2} \in \mathbb{Z}$. |

13. Arătați că următoarele fracții sunt ireductibile pentru oricare număr natural n :

- | | | |
|------------------------|--------------------------|--------------------------|
| a) $\frac{n+1}{n+2}$; | b) $\frac{6n+7}{7n+8}$; | c) $\frac{4n-7}{3n-5}$. |
|------------------------|--------------------------|--------------------------|

14. Determinați valorile numărului întreg x pentru care fracția $\frac{4x+3}{7x+6}$ e reductibilă.

15. Calculați:

- a) $\frac{15}{17} + \frac{1515}{1717}$;
- b) $\frac{16}{19} + \frac{1616}{1919} + \frac{161616}{191919} + \dots + \frac{1616\dots16}{1919\dots19}$;
- 38 de termeni

16. Determinați valorile numărului natural n pentru care:

- | | |
|--------------------------------------|---|
| a) $\frac{n}{5} < \frac{7}{5}$; | e) $\frac{n-3}{7} < \frac{5}{14}$; |
| b) $\frac{3}{n} \geq \frac{3}{8}$; | f) $\frac{13}{2n+1} \geq \frac{13}{8}$; |
| c) $\frac{4}{n} \geq \frac{12}{8}$; | g) $\frac{1}{3} < \frac{n}{15} < \frac{6}{7}$; |
| d) $\frac{n+4}{8} < \frac{7}{2}$; | h) $\frac{7}{8} < \frac{2n+1}{2n} \leq \frac{4}{3}$. |

17. Calculați:

- a) $\left(-\frac{1}{2}\right) + \left(+\frac{7}{3}\right) + \left(-\frac{4}{15}\right) + \left(-\frac{2}{5}\right)$;
- b) $\left(+\frac{5}{48}\right) + \left(-\frac{7}{18}\right) + \left(-\frac{11}{36}\right) + \left(+\frac{5}{12}\right)$;
- c) $\left(+\frac{7}{12}\right) + \left(-\frac{5}{18}\right) + \left(+\frac{1}{24}\right) + \left(-\frac{3}{4}\right)$;
- d) $\left(+\frac{2}{5}\right) + \left(+\frac{1}{2}\right) + \left(+1\frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{7}{6}\right)$;
- e) $\left(-1\frac{1}{2}\right) + \left(+1\frac{1}{4}\right) + \left(+\frac{5}{6}\right) + \left(-\frac{4}{9}\right)$;
- f) $\left(-1\frac{4}{5}\right) - \left(+2\frac{8}{15}\right) - \left(-\frac{37}{10}\right)$;
- g) $2,1 + 1,5 + \left(-\frac{8}{10}\right) + \left(-3\frac{1}{5}\right) + 0,5$;
- h) $3,5 + [-2, (6)] + 0,25 + \left(-3\frac{5}{6}\right)$;
- i) $\left(-\frac{5}{6}\right) - \left(+\frac{11}{12}\right) - 3, (2) - \left(+\frac{8}{3}\right)$;

LIBRIS We know books

j) $(-3\frac{1}{2}) - (-1\frac{1}{5}) - (+1\frac{1}{2}) - (-2\frac{9}{10})$;

k) $(-1\frac{2}{5}) + 0,2 + (+1\frac{7}{8}) + (-0,1)$;

l) $(-\frac{29}{30}) + 0,2(5) + (-5\frac{2}{5}) + 0,3(1)$;

m) $2,1(6) + (-\frac{31}{8}) + 1,08(3)$;

n) $[0,25 + (-1\frac{1}{2})] + [0, (3) + (-\frac{7}{6})] + [-0,1(6)]$;

o) $\frac{1}{6} - (-0,1(5)) - (+0,1(25)) - (-\frac{1}{9})$;

p) $1,75 + (-3,5) + 4,25 + (-1,5)$;

q) $-4,5 + (-3,25) + (-5,75) + 11,25$;

r) $[2,3(5) - 0,0(3) - (0,(6))] - (+1\frac{7}{15}) - (+\frac{1}{5})$.

18. Calculați:

a) $(-\frac{5}{18}) \cdot (+\frac{8}{20})$;

b) $(-\frac{3}{7}) \cdot (-\frac{28}{15})$;

c) $(-\frac{3}{4}) \cdot \frac{9}{25}$;

d) $(-\frac{7}{6}) \cdot (-\frac{18}{14})$;

e) $\frac{3}{14} \cdot 1$;

f) $(-2) \cdot \frac{17}{8}$;

g) $(-\frac{1}{3}) \cdot 9$;

h) $(-\frac{2}{3}) \cdot 0$;

i) $(-\frac{8}{15}) \cdot 3$;

j) $\frac{7}{13} \cdot \frac{39}{21} \cdot (-\frac{12}{16})$;

k) $(-\frac{9}{8}) \cdot (-\frac{4}{15}) \cdot (+\frac{10}{21})$;

l) $(-\frac{7}{3}) \cdot (-\frac{15}{42}) \cdot (-\frac{9}{40})$;

m) $\frac{20}{49} \cdot (-\frac{14}{5}) \cdot (-\frac{21}{8})$;

n) $(-0,(5)) \cdot \frac{3}{7} \cdot (-\frac{21}{10})$;

o) $(-2\frac{1}{4}) \cdot (-3,1(7))$;

p) $6,25 \cdot (-2) \cdot (-12\frac{1}{2})$;

q) $(-\frac{4}{9}) \cdot 12 \cdot (-1\frac{1}{5})$;

r) $\frac{9}{34} \cdot (-3\frac{2}{5}) \cdot \frac{20}{42} \cdot (-9\frac{1}{3})$;

s) $0,3 \cdot 1,24$;

t) $(-4,5) \cdot 0,5$;

u) $(-2,25) \cdot (-100)$;

v) $(-0,1(5)) \cdot (-0,3)$.

19. Stabiliți care dintre numerele a și b este mai mare:

a) $a = (-\frac{2}{3}) \cdot (+\frac{9}{4}) \cdot (-\frac{27}{2})$, $b = \frac{3}{25} \cdot (-\frac{5}{9}) \cdot (-6)$;

b) $a = (-1\frac{1}{14}) \cdot (-\frac{7}{22}) \cdot (-\frac{11}{5})$, $b = 8\frac{3}{5} \cdot \frac{21}{43} \cdot (-\frac{5}{2})$;

c) $a = (-1,5) \cdot \frac{4}{5}$, $b = 0,23 \cdot (-\frac{5}{46})$;

d) $a = 1\frac{1}{14} \cdot (-2,5)$, $b = 0,(5) \cdot \frac{27}{25} \cdot (-\frac{10}{3})$.

20. Calculați:

a) $\frac{4}{9} : \frac{2}{27}$;

b) $\left(-\frac{2}{3}\right) : \left(-\frac{4}{9}\right)$;

c) $\left(-\frac{2}{33}\right) : \frac{8}{11}$;

d) $\frac{16}{21} : \left(-\frac{4}{7}\right)$;

e) $\left(-\frac{2}{9}\right) : \left(-\frac{16}{45}\right)$;

f) $\left(-\frac{5}{8}\right) : \left(-\frac{15}{32}\right)$;

g) $32,4 : 10$;

h) $(-5,23) : 1000$;

i) $3,014 : (-100)$;

j) $0,75 : (-0,25)$;

k) $(-2,25) : (-0,15)$;

l) $0,04 : 0,4$;

m) $\left(-\frac{3}{4}\right) : 0,25$;

n) $4,25 : \left(-\frac{17}{5}\right)$;

o) $(-1,8(6)) : \left(-\frac{4}{21}\right)$;

p) $(-1,3(5)) : \left(-\frac{41}{45}\right)$;

q) $0, (3) : \frac{1}{3}$.

21. Calculați:

a) $\frac{-2\frac{1}{10}}{\frac{3}{5}}$;

b) $\frac{\frac{1}{9}}{\frac{3}{7}}$;

c) $\frac{14}{3\frac{1}{2}}$;

d) $\frac{-\frac{5}{7}}{-\frac{15}{42}}$;

e) $\frac{-3\frac{1}{7}}{1\frac{1}{21}}$;

f) $\frac{-1\frac{2}{3}}{-4\frac{1}{6}}$;

g) $\frac{\frac{21}{125}}{-\frac{14}{15}}$;

h) $\frac{2}{\frac{6}{9}}$;

i) $\frac{-\frac{2}{6}}{-9}$;

j) $\frac{\left(-\frac{3}{2}\right) : \left(-\frac{9}{4}\right)}{1\frac{1}{15}}$;

k) $\frac{\frac{121}{64} : \frac{33}{8}}{-4\frac{7}{12}}$;

l) $\frac{\frac{7}{2} : (-1,2 - 2,3)}{0,3 : \frac{7}{3}}$.

22. Calculați inversele numerelor următoare:

a) $\left[\left(-\frac{5}{4}\right)^9 : \left(-\frac{5}{4}\right)^4 : \left(-\frac{5}{4}\right) \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^3\right]$;

b) $\left[\left(-\frac{1}{4}\right)^7 : \left(-\frac{1}{4}\right)^5\right]^4 : (-4)^{-6}$;

c) $(-1,3)^1 \cdot (-1,3)^2 \cdot (-1,3)^3 : [(-1,3)^2]^3$;

d) $\left[\left(-\frac{2}{5}\right)^8 : \left(\frac{2}{5}\right)^2 : \left(-\frac{2}{5}\right)\right]^3 : \left(\frac{5}{2}\right)^{-4} \cdot \left(-\frac{5}{2}\right)^9$.

23. Aflați numărul întreg x dacă:

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{8}{27}$;

b) $(-4)^x = 1$;

c) $\left(\frac{7}{2}\right)^x = \frac{8}{343}$;

d) $\left(-\frac{5}{2}\right)^x = \frac{25}{4}$;

e) $\left(\frac{1}{7}\right)^x = 49$;

f) $\left(-\frac{1}{3}\right)^x = \frac{1}{81}$;

g) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} = \frac{1}{64}$;

h) $[0, (3)]^{2x-7} = \frac{1}{27}$;

i) $\left(\frac{3}{2}\right)^{2x-3} = \frac{32}{243}$.

a) $\left(-\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2}\right)^x = -\frac{1}{32}$;

c) $\left[\left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{9}{4}\right) \right]^{x+1} = \left(\frac{8}{27}\right)^{-1}$;

b) $\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}\right)^x = \frac{1}{64}$;

d) $\left[\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \frac{4}{5}\right]^{x-2} = 5^{-3}$.

25. Calculați:

a) $\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)^4 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right)^5 : \left(\frac{1}{36}\right)^4$;

b) $\left[\left(\frac{3}{4} - \frac{3}{8}\right)^{-2}\right]^{-6} : \left(-\frac{3}{8}\right)^{10}$;

c) $\left[\left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right)^{-1}\right]^{-5} \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^{-1} : \left(\frac{25}{36}\right)^3$;

d) $\left[-0,1(6) - \frac{1}{3}\right]^7 : [0,5^3]^{-4} : 2^{-16}$;

e) $2^{-\frac{5}{2}} \cdot \left\{ \frac{1}{8} + \left[\left(\frac{2}{3} - \frac{5}{12}\right) + \frac{2}{15} + \left(-1\frac{1}{30} + \frac{13}{15}\right) \right] : \frac{2}{3} \right\}$;

f) $\left[7 - 4 \cdot \left(2\frac{5}{6} \cdot 2 - 5\frac{3}{4} \right) - 3 \right] \cdot 2\frac{7}{13} + \left(-\frac{5}{3} - \frac{1}{6} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right)$;

g) $(-4) \cdot \left(-9\frac{1}{3} + 11\right) : \left(8 - 7\frac{1}{3}\right) + \frac{9}{5} \cdot \left(-3\frac{2}{9} + 1\frac{5}{6}\right) \cdot \frac{7}{10} : \left(\frac{22}{45} - \frac{10}{9} + \frac{7}{15}\right) - 7$;

h) $\frac{6}{13} \cdot \left[\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{24} - \frac{7}{36}\right) : \frac{7}{6} \right] - \left[\frac{1}{3} + 1 : \left(\frac{1}{7} + \frac{6}{7} \cdot \frac{1}{6}\right) : \frac{7}{6} \right] : \left(-\frac{91}{12}\right)$;

i) $\left\{ \left[\left(-\frac{2}{35} + \frac{3}{14}\right) - \left(\frac{33}{35} - \frac{3}{2}\right) + \left(-2 - \frac{5}{14} + \frac{12}{7}\right) \right] + \frac{8}{35} \right\} : \left(-\frac{3}{10}\right)$.

26. Arătați că $\frac{1}{3} < \frac{1}{30} + \frac{1}{31} + \frac{1}{32} + \dots + \frac{1}{49} < \frac{2}{3}$.

27. a) Arătați că $\frac{1}{n(n+k)} = \frac{1}{k} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+k} \right)$, pentru oricare $n, k \in \mathbb{N}^*$.

b) Calculați $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{21 \cdot 23}$.

28. Arătați că:

a) $\frac{1}{1 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 11} + \frac{1}{11 \cdot 16} + \dots + \frac{1}{96 \cdot 101} < 0,2$.

b) $\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 13} + \dots + \frac{1}{101 \cdot 105} > \frac{1}{5}$;

c) $\frac{1}{2} < \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{99 \cdot 100} < 1$.

a) $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \dots + \frac{1}{90}$;

b) $\frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \frac{1}{56} + \frac{1}{72} + \dots + \frac{1}{9900}$.

30. Arătați că $[x] = 0$, unde $x = \frac{1}{50 \cdot 51} + \frac{1}{51 \cdot 52} + \frac{1}{52 \cdot 53} + \dots + \frac{1}{99 \cdot 100}$.

31. Fie $a = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{4}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{1}{100}\right)$ și

$b = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{100}\right)$. Arătați că $(a - 50b) \div 50$.

32. Arătați că numărul

$$\left[\left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{4}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) - \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \right] \cdot n$$

este număr natural pentru oricare $n \in \mathbb{N}^*$.

33. Arătați că:

a) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{19}} < 1$;

b) $\left[\left(+\frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{3^2}\right) + \left(+\frac{1}{3^3}\right) + \left(-\frac{1}{3^4}\right) + \dots + \left(+\frac{1}{3^{11}}\right) + \left(-\frac{1}{3^{12}}\right) \right] \cdot 4 + \frac{1}{3^{12}} = 1$.

34. Calculați media aritmetică ponderată a numerelor:

a) 5, 8, 10 cu ponderile 3, 6 și respectiv 7.

b) 15,4 și 8,3 cu ponderile 2 și respectiv 3.

c) 20,(13) și 2,01(3) cu ponderile 99 și respectiv 900.

d) $\frac{2}{5}$; $\frac{5}{6}$ și $\frac{1}{3}$ cu ponderile 4, 9, respectiv, 12.

35. La teza la matematică elevii unei clase au obținut note așa cum se arată în tabelul următor:

Nota	4	5	6	7	8	9	10
Număr elevi	2	8	6	3	4	3	2

a) Câți elevi au luat nota 8?

b) Câți elevi au luat cel puțin nota 7?

c) Care este media clasei? (calculați cu două zecimale exacte)